UNIDADES TEMÁTICAS

1. Unidad Temática II.- Geometría Analítica

2. Horas Prácticas 5

3. Horas Teóricas 11

4. Horas Totales 16

5. Objetivo

El alumno resolverá problemas de rectas y cónicas en el plano cartesiano para contribuir a la interpretación y solución de problemas de su entorno.

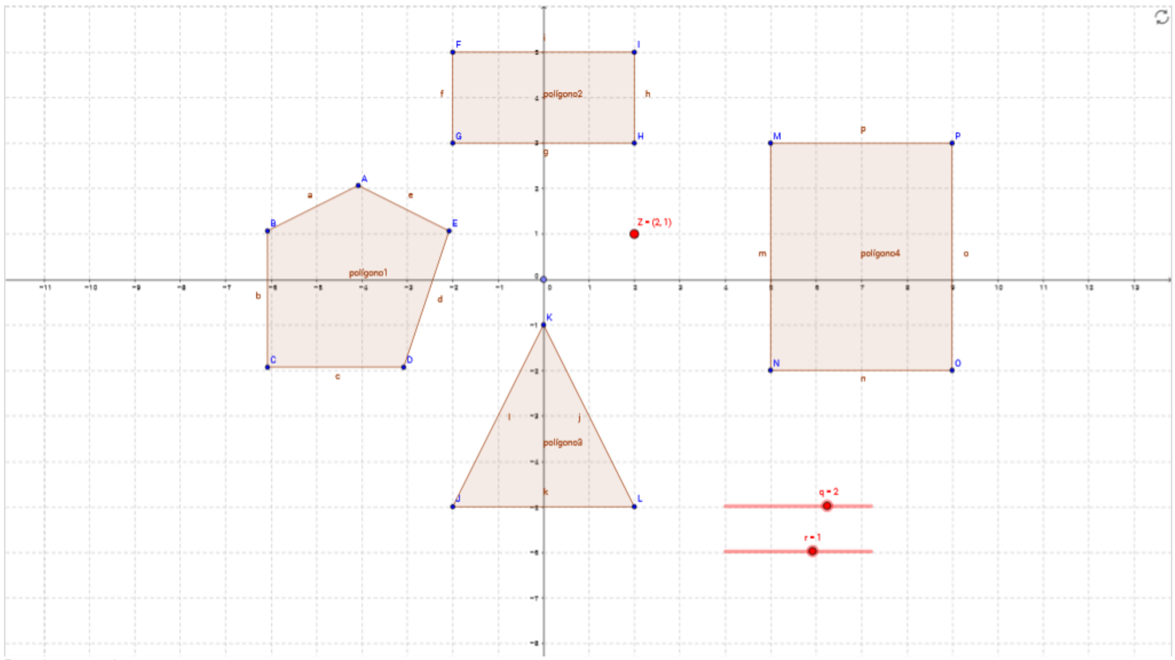
1. La recta en el sistema cartesiano

1.1. Elementos y características de un plano cartesiano.

El plano cartesiano está determinado por dos rectas perpendiculares a las que se les llama eje de coordenadas.

La recta horizontal se llama eje de las equis o eje de las abscisas y la recta vertical ejes de la y o eje de las ordenadas.

Cada uno de estos ejes es una recta numérica, en el eje X los positivos están a la derecha del cero mientras en el eje de la Y los positivos se encuentran en la parte superior. El punto de corte de los ejes se llama origen.

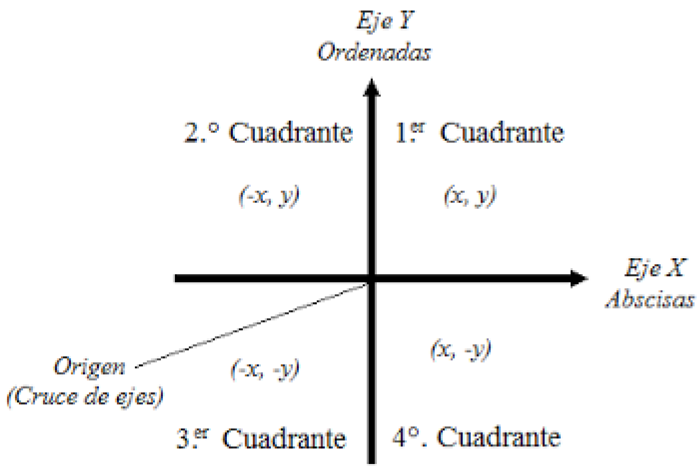


LAS PARTES Y EL USO DEL PLANO CARTESIANO

PARTES DEL PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano *está* formado por dos rectas *numéricas perpendiculares*. La recta horizontal se *llama EJE* DE LAS ABSISAS o (x), y la *vertical* EJE DE LAS ORDENADAS O (Y) ; él punto donde se *cortan* se llama ORIGEN. El plano *cartesiano* se divide en cuatro partes a las que se le llama Cuadrante que se enumeran comenzando desde de la parte superior derecha hacia la izquierda.

Plano Cartesiano



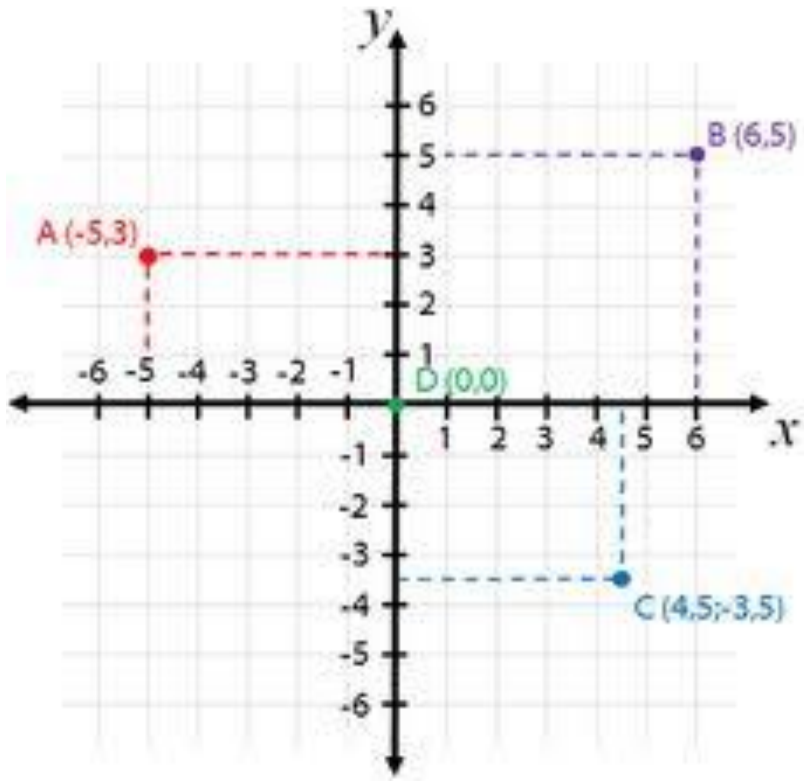
http://psiquebasica.blogspot.com/

EL USO DEL PLANO CARTESIANO

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

* Para localizar la abscisa o valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia a izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.

* Desde donde se localiza el valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas sus coordenadas.



El plano cartesiano tiene como finalidad *describir* la *posición* de puntos o lugares *geométricos* los cuales, se representan por sus coordenadas o pares de coordenadas.

1.2. Conceptos.

1.2.1. Punto. - En geometría, el punto es uno de los entes fundamentales, junto con la recta y el plano. Son considerados conceptos primarios, es decir, que sólo es posible describirlos en relación con otros elementos similares o parecidos. Se suelen describir apoyándose en los postulados característicos, que determinan las relaciones entre los entes geométricos fundamentales. El punto es una figura geométrica sin dimensión, tampoco tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. Describe una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecidas. Un punto puede determinarse con *diversos sistemas* *de referencia, E*n el sistema de coordenadas cartesianas *que es el que nos compete*, se determina mediante las distancias ortogonales a los ejes principales, que se indican con dos letras o números: (x, y) en el plano; y con tres en el espacio (x, y, z).

1.2.2. Recta. - En geometría euclidiana, la recta o la línea recta se extiende en una misma dirección por tanto tiene una sola dimensión y contiene infinitos puntos; se puede considerar que está compuesta de infinitos segmentos. Dicha recta también se puede describir como una sucesión continua e indefinida de puntos extendidos en una sola dimensión, es decir, no posee principio ni fin. Es uno de los entes geométricos fundamentales, junto al punto y el plano. Son considerados conceptos apriorísticos ya que su definición solo es posible a partir de la descripción de las características de otros elementos similares. Un ejemplo de las dificultades de la definición de la recta a partir de puntos es la llamada paradoja de Zenón de la dicotomía que ilustraba la desaparición de la recta al dividirla en puntos. Así, es posible elaborar definiciones basándose en los postulados característicos que determinan relaciones entre los entes fundamentales. Las rectas se suelen denominar con una letra minúscula. En geometría analítica las líneas rectas pueden ser expresadas mediante una ecuación del tipo y = m x + b, donde x, y son variables en un plano cartesiano. En dicha expresión m es denominada la "pendiente de la recta" y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el plano. Mientras que b es el denominado "término independiente" u "ordenada al origen" y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano.

Representación de un segmento de recta.

Definición geométrica de la recta: La recta es el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos cualesquiera del lugar geométrico, el valor de la pendiente siempre resulta constante.

Definición analítica de la recta: Una recta viene a ser la unión de un vector dado entre dos puntos que siguen la misma dirección del vector original unitario.

1.2.3. Distancia entre dos *puntos. -* Es la trayectoria descrita por una línea *de un punto A hacia un punto B*, donde la línea *más* recta entre los dos puntos *será* la distancia *más* corta entre ellos.

Ejemplo: La distancia entre los puntos (-4,0) y (5,0) es 4 + 5 = 9 unidades.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje y o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

Ahora si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos A (x_1, y_1) y B(x_2, y_2) en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa AB y emplear el teorema de *Pitágoras*.

Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos A (7,5) y B (4,1)

$$d = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9+16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

d = 5 unidades

1.2.4. Punto medio de un segmento de *recta.* - Punto medio o punto equidistante, en matemática, es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos. Si es un segmento acotado, el punto medio es el que lo divide en dos partes iguales. En ese caso, el punto medio es único y equidista de los extremos del segmento.

Coordenadas cartesianas.

Dado un segmento, cuyos extremos tienen por coordenadas:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

el punto medio tendrá por coordenadas:

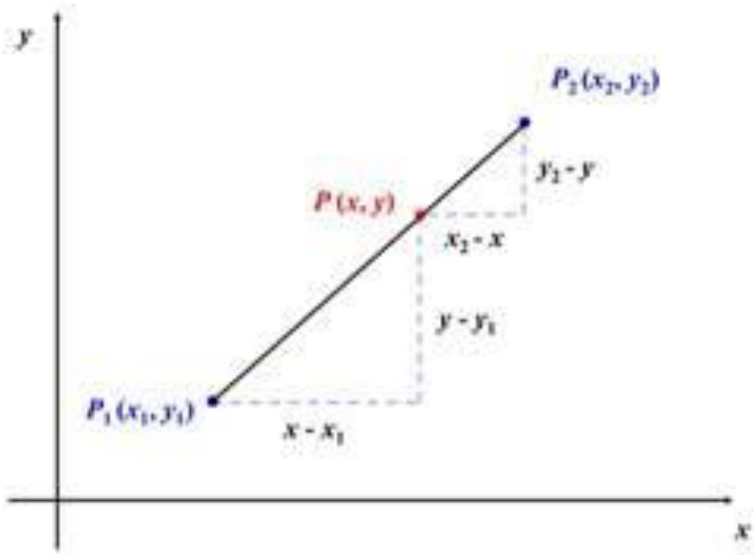
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Nota: La fórmula es fácil de retener en la memoria si la verbalizamos de la siguiente manera: "coordenadas del punto medio, promedio de coordenadas"

1.2.5. División de un segmento de recta en una razón dada. - Dividir un segmento dirigido en una razón dada significa segmentarlo en partes de forma tal que se encuentren las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que satisface la comparación entre dos magnitudes.

En general, si la razón es de la forma $r = \frac{a}{b}$, implica que el segmento se divide en a + b partes. Por ejemplo, si $r = \frac{4}{7}$, el segmento se divide en 11 partes iguales.

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ así como el segmento de recta que los une:



Sea un punto $P(x, y)$ que pertenezca al segmento. Si se forman los triángulos mostrados, se observa que son semejantes. Esto es:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$ y $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$

Donde r es la razón de proporcionalidad de semejanza.

Si se despeja x de la primera ecuación se tiene:

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

Análogamente se puede encontrar que:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Expresiones que sirven para obtener las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada.

En el caso particular en que se trate del punto medio, r vale $r = \frac{1}{1} = 1$, y las ecuaciones se convierten en:

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

CONCLUSIÓN

Con r = 0, el punto $P(x, y)$ se ubica en P_1. A medida que r va creciendo $P(x, y)$ se desplaza hacia P_2. En su punto medio r vale 1. Cuando r es negativa, el punto se ubica en su prolongación hacia abajo alejándose hasta que llega a r = -1 donde es infinito y cambia de sentido. Al seguir decreciendo, tiende a P_2.

1.2.6. Distancia de un punto a una recta. – La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

$$d(P,r) = |\overrightarrow{PM}|$$

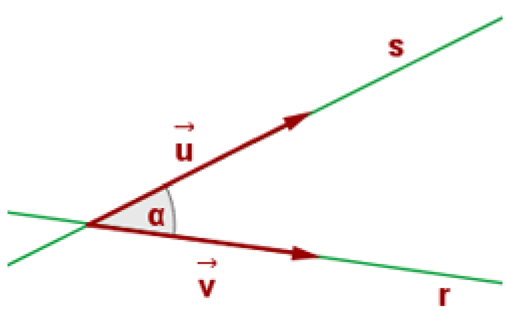
$$d(P,r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Calcula la distancia del punto P (2,- 1) a la recta r de ecuación 3 x + 4 y = 0.

$$d(P,r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

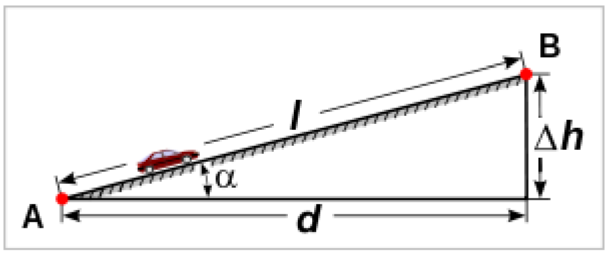
1.2.7. Ángulo entre dos rectas. - Se llama ángulo de dos rectas al menor de los ángulos que forman éstas. Se pueden obtener a partir de:



Rectas paralelas al eje OY

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|$$

1.2.8. Pendiente de una recta. - En matemáticas y ciencias aplicadas se denomina pendiente a la inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal. En geometría analítica, puede referirse a la pendiente de la ecuación de una recta (o coeficiente angular) como caso particular de la tangente a una curva, en cuyo caso representa la derivada de la función en el punto considerado, y es un parámetro relevante, por ejemplo, en el trazado altimétrico de carreteras, vías férreas o canales.



Pendiente de una carretera.

La pendiente de una recta en un sistema de representación rectangular (de un plano cartesiano), suele estar representada por la letra m, y está definida como la diferencia en el eje Y dividido por la diferencia en el eje X para dos puntos distintos en una recta. En la siguiente ecuación se describe:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Geometría

Una recta horizontal tiene pendiente igual a 0 (cero). Cuanto menor sea el valor de la pendiente, menor inclinación tendrá la recta; por ejemplo, una recta que se eleve un ángulo de 45° con respecto al eje X tiene una pendiente m = +1, y una recta que caiga 30° tiene pendiente m = -0,5. La pendiente de una recta vertical no está definida, o se dice que es infinita.

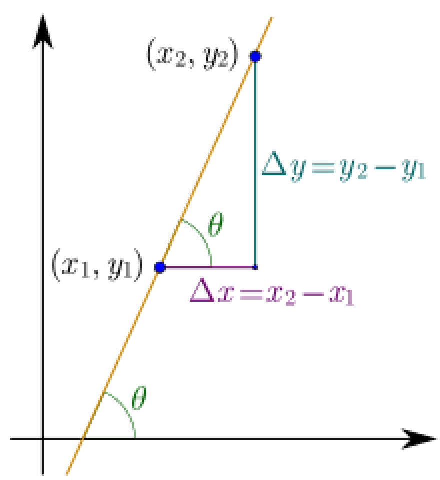
El ángulo θ que una recta forma con el eje horizontal está relacionado con la pendiente *m* por medio de la siguiente relación trigonométrica:

$$m = \tan\theta$$

o equivalentemente:

$$\theta = \arctan m$$

Dos o más rectas son paralelas si ambas poseen la misma pendiente, o si ambas son verticales y por ende no tienen pendiente definida; dos o más rectas son perpendiculares (forman un ángulo recto entre ellas) si el producto de sus pendientes es igual a -1.



Pendiente: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\theta)$

1.3. Las formas de la ecuación de la recta.

1.3.1. Fórmula general

A toda recta “L” del plano cartesiano está asociada al menos una ecuación de la forma:

ax+by+c=0

En donde a, b y c son números reales; a y b son diferentes de cero y (x, y) representa un punto genérico de “L”.

1.3.2. Fórmula reducida (pendiente-ordenada).

Sí despejamos “y” dela fórmula general obtenemos:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Donde:

$$\frac{-a}{b} = m$$

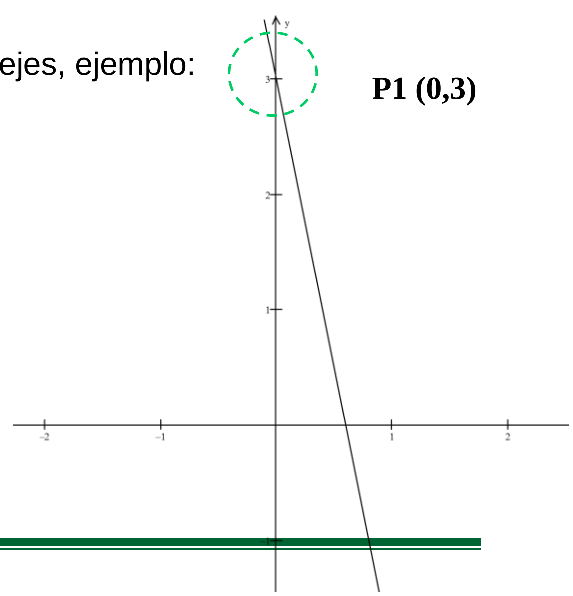
$-\frac{c}{b} = b$ (Aquíb es otra constante representa la ordenada al origen)

Inicia extracto del libro “Calculo diferencial para cursos con enfoque por competencias de Jorge Gil, editorial Pearson.”

La función lineal es aquella de la forma $y = mx + b$ **su dominio e imagen son todos los valores** es decir no tiene restricción alguna. Para graficarla sólo se necesitan dos puntos y podemos recurrir a una de las siguientes alternativas, grafica 2.9 y 2.10.

A. Ya que su gráfica es una línea recta podemos asignar dos valores a “x” y unirlos mediante una línea recta.

B. El otro caso es interceptar la recta con los ejes, ejemplo:



P1 (0,3)

$y = -5x + 3$

haciendo la x=0 tenemos que

$y = -5(0) + 3 = 3$

La gráfica se intersecta con el eje "y" en (0,3)

haciendo la y=0 tenemos que

$0 = -5x + 3$

P2 ($\frac{3}{5}$,0)

$-3 = -5x$

$x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

La gráfica se intersecta con el eje "x" en ($\frac{3}{5}$,0)

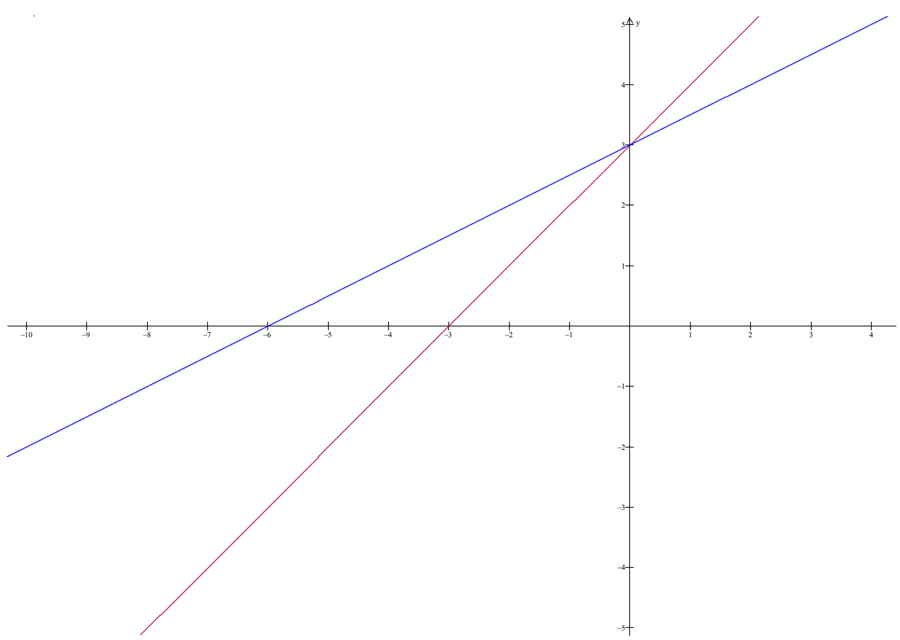
Grafica 2.9

Aquí b=3, que es la intersección con el eje "y" o sea 3 unidades hacia arriba, m= -5 por lo tanto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{1}$$

Por lo tanto recorre -5 unidades hacia abajo en el eje "y" y una unidad hacia la derecha en "x".

Ejemplo 2:

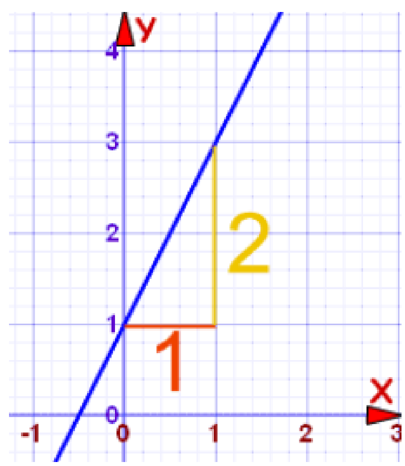


Grafica 2.10

Este (grafica 2.10) es otro ejemplo función lineal la línea roja corresponde a la función $y = x + 3$ y la línea azul corresponde a la función $y = \frac{1}{2}x + 3$. La razón de que la segunda función este más empinada es la siguiente, el coeficiente de la x representa la pendiente que como recordarás la pendiente es igual a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, por lo tanto si el denominador es más grande que el numerador significará que la gráfica recorrerá más unidades de “X” y menos de “Y”. El signo positivo o negativo indica sí la gráfica crece a la derecha o a la izquierda.

Finaliza extracto del libro “Calculo diferencial para cursos con enfoque por competencias de Jorge Gil, editorial Pearson.”

Ejemplo:



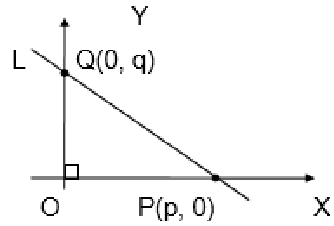
$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$b = 1$$

Por lo tanto $y = 2x + 1$

1.3.3. Ecuación simétrica

Consideremos una recta L que intercepta a los ejes cartesianos en los puntos Q(0, q) y P(p, 0), distintos.



La ecuación de esta recta es: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq.$

De donde:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

a ésta se le conoce como: "**Ecuación simétrica de la recta" ó Abscisa - ordenada en el origen.**

1.4. Proceso para obtener la ecuación de la recta.

1.4.1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

Si tenemos dos puntos es más que suficiente para encontrar la ecuación de la recta usando la fórmula:

$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con esa fórmula encontramos m, o sea la pendiente, y para encontrar b usamos cualquiera de los puntos.

$y_1 = mx_1 + b$

Y ya que conocemos m y un punto despejamos b, y con eso obtenemos la ordenada al origen.

Ejemplo:

$P_1(1,3) \quad P_2(5,6)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Usamos cualquier punto y sustituimos:

$$3 = \frac{3}{4}(1) + b$$

$$b = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

1.4.2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por un punto y la pendiente es similar, e incluso más fácil. Si continuamos con el ejemplo de arriba tenemos que:

$P_1(1,3)$ m=$\frac{3}{4}$

$$y = mx + b$$

Sustituimos los valores:

$$3 = \frac{3}{4}(1) + b$$

$$b = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

1.4.3. Pendiente-ordenada al origen:

Rematamos con el mismo ejemplo para obtener:

m=$\frac{3}{4}$ b=$\frac{9}{4}$

$y = mx + b$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

Ya tenemos la ecuación de la fórmula ahora podemos obtener cualquier punto.

Sí queremos obtener el valor de "y" en x=1, simplemente sustituimos en la fórmula:

$y = \frac{3}{4}(1) + \frac{9}{4} = 3$

Y en x=5, "y" vale:

$y = \frac{3}{4}(5) + \frac{9}{4} = 6$

Ejercicios para obtener la ecuación general de la recta dados un punto y la pendiente

Recuerde que la fórmula inicial es **$y - y_1 = m(x - x_1)$**

1. m = –1; punto (–2, 3)

y – 3 = –1(x + 2)
y – 3 = –x – 2
x + y – 1 = 0

2. m = 2; punto (–3/2, –1)

y + 1 = 2(x + 3/2)
y + 1 = 2x + 3
– 2x + y – 2 = 0
2x – y + 2 = 0

3. m = 0; punto (–3, 0)

y – 0 = 0(x + 3)
y = 0

4. m= –4; punto (2/3, –2)

y + 2 = –4(x – 2/3)
y + 2 = –4x + 8/3
y +2 – 4x –8/3 = 0

$y - 2/3 - 4x = 0$
$4x - y + 2/3 = 0$

5. m = –2/5; punto (1,4)

$y - 4 = 1(x - 1)$
$y - 4 = x - 1$
$y - 4 - x + 1 = 0$
$y - 3 - x = 0$
$x - y + 3 = 0$

6. m = 3/4; punto (2,5, –3)

$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 2{,}5)$
$y + 3 = 3/4x - 15/8$
$y + 3 - 3/4x + 15/8 = 0$
$y + 39/8 - 3/4x = 0$
$3/4x - y - 39/8 = 0$

7. m = ind; punto (0,5)

$y - 5 = (x - 5)$
$y - 5 - x + 5 = 0$
$y - x = 0$
$x - y = 0$

8. m = 0; punto (–4, 1/2)

$y - \frac{1}{2} = (x + 4)$
$y - \frac{1}{2} - x - 4 = 0$
$y - 9/2 - x = 0$
$x - y + 9/2 = 0$

Ejercicios para obtener la ecuación general de la recta dados los puntos.

1.- P_1 (-1,-2) y P_2 (4,8)

2.- P_1 (-2,4) y P_2 (-1,-5)

3.- P_1 (3,0) y P_2 (-7,-4)

4.- P_1 (1,2) y P_2 (6,10)

5.- P_1 (-5,3) y P_2 (-6,-8)

6.- P_1 (6,2) y P_2 (9,5)

7.- P_1 (2,2) y P_2 (4,4)

8.- P_1 (½, ¾) y P_2 (-2,8)

9.- P_1 (10,2) y P_2 (-3,1)

Ejercicios para obtener la ecuación general de la recta dada la pendiente y la ordenada al origen

1.- m= -½, b=-3

2.- m= ¾, b=6

3.- m=-2, b=9

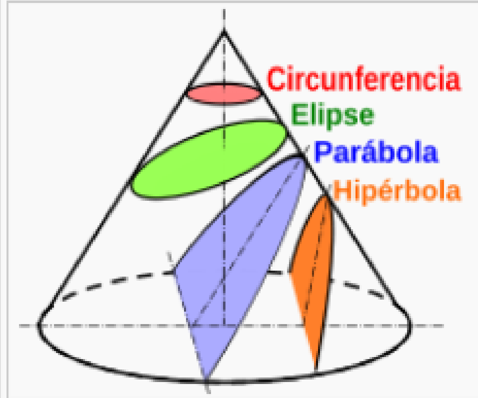
4.- m= 0.11, b=-2

5.- m=1, b=1

2. Cónicas.

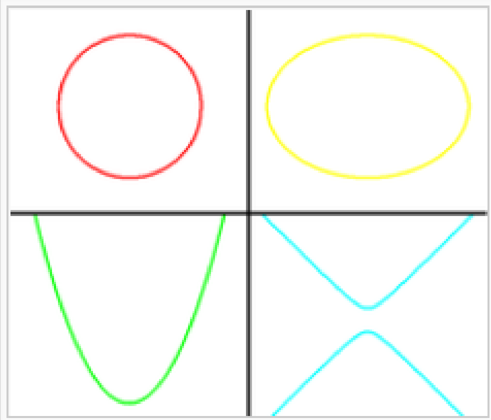
2.1. Conceptos de cónicas y lugar geométrico.

Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas. Se clasifican en cuatro tipos: elipse, parábola, hipérbola y circunferencia.



Perspectiva de las secciones cónicas.

Los cuatro ejemplos de intersección de un plano con un cono: parábola (**1**), elipse y circunferencia (**2**) e hiperbola (**3**).



Las cuatro secciones cónicas en el plano.

Lugar geométrico

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas condiciones o propiedades geométricas.

La propiedad geométrica que define el lugar geométrico, tiene que traducirse a lenguaje algebraico de ecuaciones.

2.2. Definir los conceptos y elementos de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

Circunferencia: es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro.

Elementos de la circunferencia.

La **circunferencia** es una línea curva cerrada y plana, cuyos puntos están todos a la misma distancia del centro.

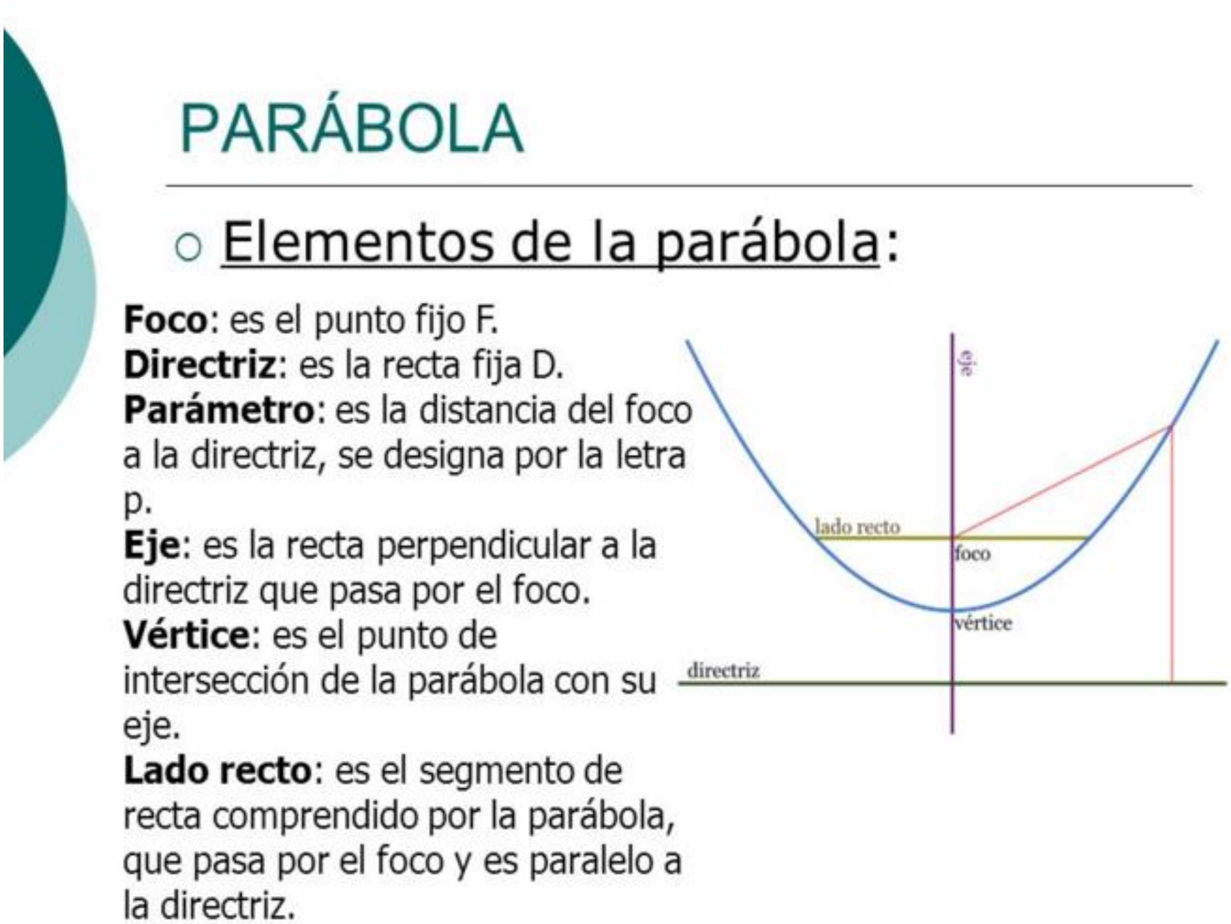
Los elementos de la circunferencia son los siguientes:

- **Centro**. Es el punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio**. Es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.
- **Cuerda**. Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro**. Es una cuerda que pasa por el centro. Su longitud es el doble de la longitud de un radio.
- **Arco**. Es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia**. Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

Para construir una circunferencia es indispensable el compás, tener el centro y el radio de esta. El primer paso es tomar el compás y colocar la punta en el centro, continuo hay que abrirlo de acuerdo al radio elegido y finalmente hay que hacer un giro circular de modo que quede la circunferencia terminada.

Parábola: es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz.

Elementos de la parábola.



La parábola se construye por la relación que existe entre sus puntos, un punto fijo llamado foco -'F'- y una recta llamada directriz -'d'-. La recta que pasa por `F' y es perpendicular a la directriz es el eje de la parábola y su eje de simetría. El punto de corte de la parábola con su eje es el vértice.

Elipse: es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante.

Elementos de la elipse:

Focos: Son los puntos fijos F1 y F2.

Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.

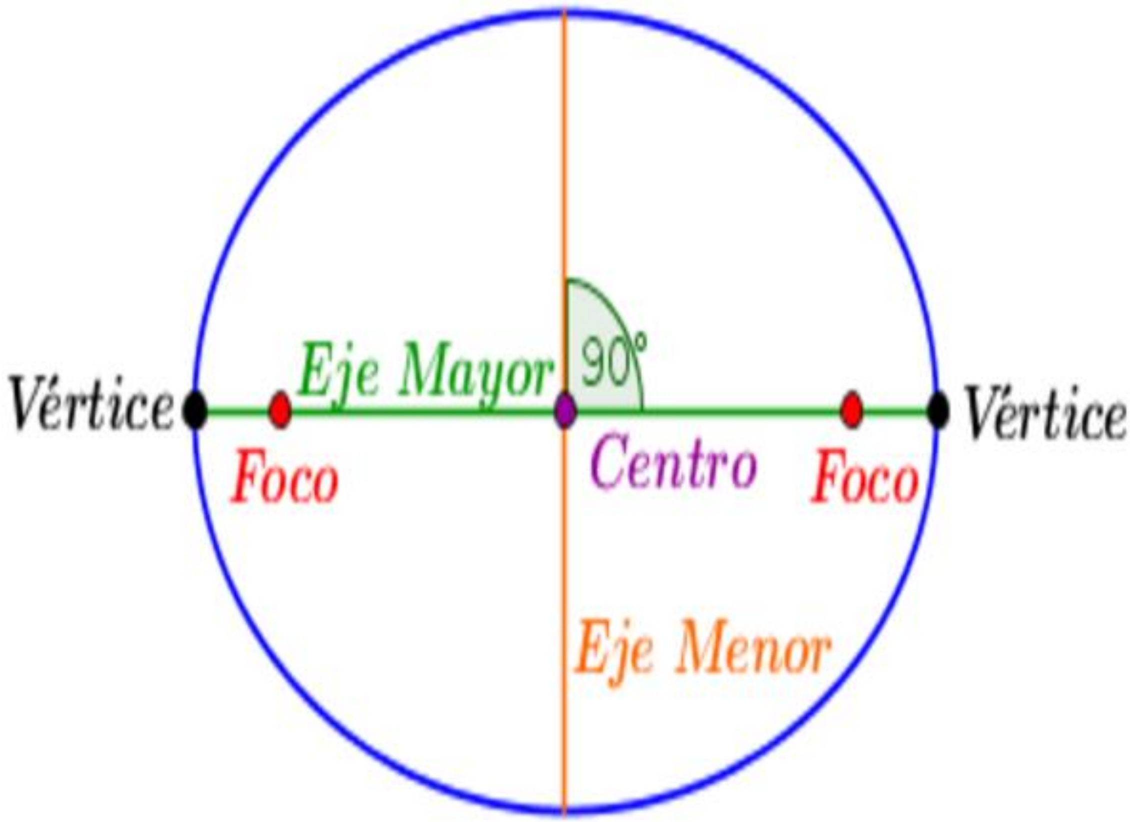
Eje secundario: Es la mediatriz del segmento F1F2.

Centros: Es el punto de intersección de los ejes.

Radios vectores: Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos, PF1 y PF2.

Distancia focal: Es el segmento F1F2 de longitud 2c, c es el valor de la semi-distancia focal.

Vértice: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: V1, V2, B1, B2.



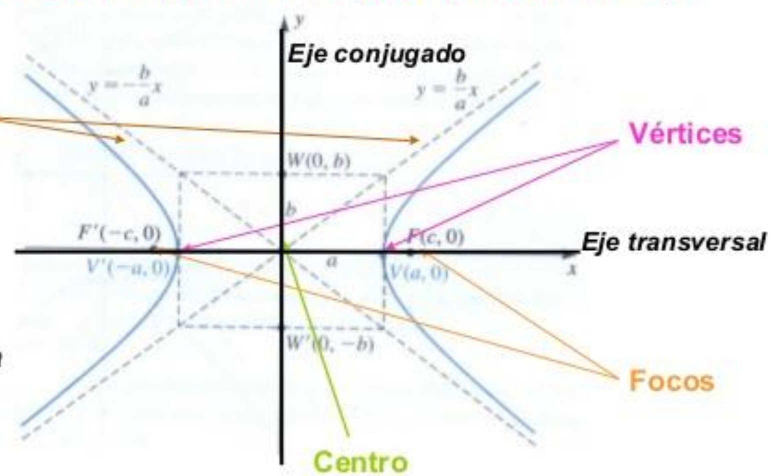
Para construir una elipse hay varios métodos, pero uno de los más conocidos y más sencillos es el método del jardinero. Se fijan dos puntos (que pueden ser dos chinchetas en un cartón) F y F´. (La distancia entre F y F´ la llamaremos 2c) Se coge un hilo de longitud fija 2a y se unen los extremos con las chinchetas. Manteniendo el hilo tenso con un lápiz se puede dibujar una curva deslizando el hilo sobre el cartón. Esta curva cerrada es una elipse.

Hipérbola: es una sección cónica, una curva abierta de dos ramas obtenida cortando un cono recto por un plano oblicuo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

Elementos de la hipérbola

- SON LOS MISMOS DE LA ELIPSE.
- Un CENTRO C(0 , 0)
- Dos FOCOS F(±c , 0)
- Dos VÉRTICES V(±a , 0) Observe que (a < c)
- *La elipse es el conjunto de* ***puntos P*** *tales que*

d(F1,P) - d(P,F2) = ±2a (la elipse es suma, y la hipérbola es resta)

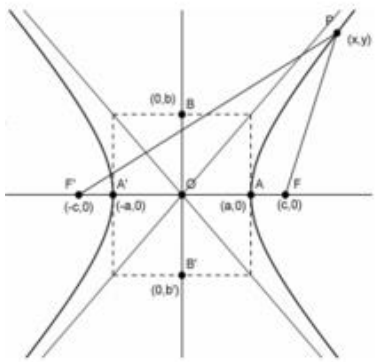


Otros elementos:

Eje transversal: ***a***

Eje conjugado: ***b***

b2 = c2 – a2



- **Focos**
  Son los puntos fijos F y F'.
- **Eje focal**
  Es la recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario o imaginario**
  Es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
- **Centro**
  Es el punto de intersección de los ejes.
- **Vértices**
  Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
  Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.
- **Radios vectores**
  Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF'.
- **Distancia focal**
  Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c.
- **Eje mayor**
  Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud 2a.
- **Eje menor**
  Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud 2b.
- **Ejes de simetría**
  Son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
- **Asíntotas**
  Son las rectas de ecuaciones:
  $$y = -\frac{b}{a}x\,, \quad y = \frac{b}{a}x$$
- **Relación entre los semiejes**
  $$c^2 = a^2 + b^2$$

Construir una hipérbola: En la hipérbola se fijan dos puntos F y F´ (que llamaremos Focos) y se elige una regla de longitud L, mayor que la distancia FF´. Se Toma un hilo de longitud H, tal que L-H se menor que FF´, se fija un extremo del hilo en el extremo T de la regla, y el otro extremo del hilo se fija se une a uno de los focos por ejemplo F. El extremo libre de la regla se apoya sobre el otro foco F´. Cogemos un lápiz P y tensando el hilo llevamos el lápiz junto a la regla. Deslizamos el lápiz sobre la regla manteniendo el hilo tenso, al desplazar el lápiz sobre la regla esta girara. De esta forma se traza una rama de la hipérbola. Para trazar la otra rama se apoya la regla en el otro foco y se hace lo mismo.

2.3. Proceso de obtención de las ecuaciones de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

2.4. Explicar las formas de ecuaciones:

2.4.1. Circunferencia

Común

$x^2 + y^2 = r^2$

Canónica

$(x-h)^2 + (y-k^2) = r^2$

General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \text{ ; desarrollando}$$
$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2 \text{ ; ordenando}$$
$$x^2 + y^2 - 2xh \ \ 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \text{; agrupando}$$
$$x^2 + y^2 + \underbrace{(-2h)}_{D}x + \underbrace{(-2k)}_{E}y + \underbrace{(h^2 + k^2 - r^2)}_{F} = 0 \text{ ; renombrando}$$
$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro C(2;6) y radio r = 4

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 2(2x) + 2^2 + y^2 - 2(6y) + 6^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 + 36 - 16 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 12y + 24 = 0}$$

$$D = -4 \text{ , } E = -12 \text{ , } F = +24$$

Observaciones:

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se cumple que:

- El centro es: $C = \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$
- El radio es: $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F^2}$

Ejercicios:

Hallar la ecuación general de la circunferencia y graficarla dados los siguientes datos:

1) P (-3,4), r=3
2) P (2,-5), r=4
3) P (-1,4), r=2
4) P (1,7), r=6
5) P (-4,2), r=1

2.4.2. Parábola

Canónica

$$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$$

General

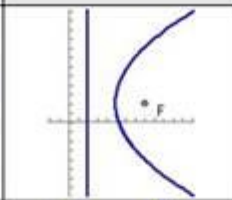
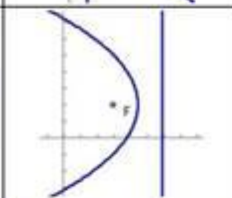
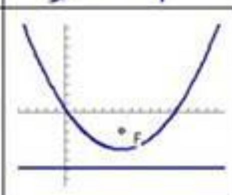
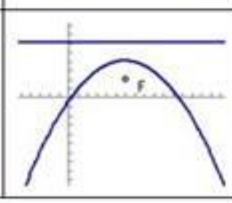
La ecuación general de la parábola con el eje vertical:

$y = ax^2 + bx + c$

La ecuación general de la parábola con el eje horizontal:

$x = ay^2 + by + c$

Donde a ≠ 0, y b y c son dos números reales.

Orientación[3]	Abre hacia...[4]	Gráfica	Ecuación Ordinaria	Foco	Directriz	Eje Focal	LR
Horizontal	La Derecha		$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$	$\boxed{F(h+p,k)}$	$\boxed{x = h-p}$	$\boxed{y = k}$	$\boxed{LR = \lvert 4p \rvert}$
	La Izquierda		$\boxed{(y-k)^2 = -4p(x-h)}$				
Vertical	Arriba		$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$	$\boxed{F(h,k+p)}$	$\boxed{y = k-p}$	$\boxed{x = h}$	
	Abajo		$\boxed{(x-h)^2 = -4p(y-k)}$				

Ecuación General de la Parábola

Parábola Vertical	Parábola Horizontal
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$	$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$
$\underset{A}{x^2} \underbrace{-2hx}_{D} \underbrace{-4py}_{E} + \underbrace{h^2 + 4pk}_{F} = 0$	$\underset{C}{y^2} \underbrace{-4px}_{D} \underbrace{-2ky}_{E} + \underbrace{k^2 + 4ph}_{F} = 0$
$\boxed{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$	$\boxed{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Ejemplo I

Una parábola tiene vértice en el **punto (–4, 2)**, y su **directriz es y = 5**, encuentre su ecuación y exprésela en la forma general.

Desarrollo

Analizando las coordenadas del vértice y la posición de la directriz, se puede concluir que:

a) La directriz es paralela al eje de las abscisas, por lo tanto, la posición de la parábola es vertical.

b) La directriz corta al eje de las ordenadas en un valor (5) mayor que la ordenada del vértice (2), por lo tanto, la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo del eje de las Y).

c) Las coordenadas del vértice no corresponden con las del origen.

d) Dado lo anterior, se trata entonces de una parábola cuya **ecuación ordinaria o canónica** es del tipo:

$$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$$

De las coordenadas del vértice se obtiene:

$h = -4$

$k = 2$

Se obtiene **p** por diferencia entre las ordenadas del vértice y de la directriz, resultando:

$p = 5 - 2$

$p = 3$

Sustituyendo valores en la ecuación ordinaria, resulta:

$(x - h)^2 = -4p(y - k)$

$(x - (-4))^2 = -4\,(3)\,(y - (+2))$

$(x + 4)^2 = -12(y - 2)$

$(x + 4)^2 = –12y + 24$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$(x + 4)\ (x + 4) = x^2 + 8x + 16$

$x^2 + 8x + 16 +12y – 24$

Simplificando e igualando a cero la ecuación se tiene:

$x^2 + 8x + 16 + 12y – 24 = 0$

$x^2 + 8x + 12y – 8 = 0$

Que es la ecuación buscada.

Ejemplo II

Dada la ecuación de la parábola

$y^2 + 8y – 6x + 4 = 0,$

encuentre las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de su directriz.

Una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general anterior llevándola a la forma ordinaria o canónica.

Como primer paso, se separan a diferentes miembros la variable al cuadrado **(y^2)** y la variable lineal **(6x)** junto con el término independiente **(–4)**

$y^2 + 8y = 6x – 4$

Con la intención de factorizar se procede a la adición (en ambos miembros de la ecuación) de un término adecuado para que se complete el **trinomio cuadrado perfecto**:

En este caso ese número es 16, que se obtiene dividiendo a la mitad el **valor numérico del factor lineal (el 8 de 8y)** y el resultado elevado al cuadrado:

8/2 = 4 y **$4^2 = 16$** (8 dividido 2 es igual a 4 y 4 al cuadrado es 16)

Y 16 lo sumamos a ambos lados de la ecuación:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16$$

Simplificando:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12$$

Factorizando resulta:

El **trinomio cuadrado $y^2 + 8y + 16$** que se convierte en **cuadrado de binomio $(y + 4)^2$**

$$y^2 + 8y + 16 = (y + 4)^2$$

Y el segundo miembro queda

$$6x + 12 = 6(x + 2)$$

Entonces, la ecuación queda así:

$$(y + 4)^2 = 6(x + 2)$$

Que es la ecuación ordinaria de una parábola con vértice fuera del origen, horizontal, y que se abre hacia la derecha, en el sentido positivo del eje de las abscisas, según lo visto anteriormente.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Con lo cual se puede determinar que:

$$k = -4$$

$$h = -2$$

Por lo tanto, el vértice tiene las coordenadas V (–2, –4)

Además:

Si **4p = 6**

Entonces

p = 6/4 = 3/2

Considerando la orientación ya señalada de la parábola y el valor de **p**, es posible determinar la posición del foco, ya que éste estará alineado a la derecha del vértice a una distancia **p** desde **h**, y con la misma ordenada **k**, resultando:

F(h + p, k)

F(–2 + 3/2, –4)

F(–1/2, –4)

La ecuación de la directriz se obtiene de **x – h + p = 0**

Resultando:

x – (– 2) + (3/2) = 0

x + 4/2 + 3/2 = 0

x + 7/2 = 0

x = –7/2

Ejemplo III

Veamos otro ejemplo, tenemos la ecuación desarrollada

$$3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

Siempre que una variable esta elevada al cuadrado se trata de una parábola.

Para determinar si corresponde a una parábola, debe semejarse a:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

que es la ecuación de una **parábola de eje vertical, abierta hacia arriba**.

Para llevar la ecuación desarrollada a la forma **$(x - h)^2 = 4\,p\,(y - k)$** usaremos el método de completar el trinomio, para llevarlo a cuadrado perfecto:

$$3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

Empezamos separando las variables en cada miembro :

Pasar los términos sin "x" al lado derecho de la ecuación

$$3x^2 - 4x = 6y - 8$$

dividir toda la ecuación por el coeficiente de la variable cuadrática, en este caso es 3, para quedar

$$x^2 - 4/3\,x = 2y - 8/3$$

Obtener la mitad de 4/3

$$(4/3)\,/\,2 = 2/3$$

Y elevarla al cuadrado

$$(2/3)^2 = 4/9$$

Sumar 4/9 en ambos lados de la ecuación (de la parábola)

$$x^2 - 4/3\,x + 4/9 = 2y - 8/3 + 4/9$$

Factorizar y simplificar

$$(x - 2/3)^2 = 2y - 20/9$$

Factorizar por 2 en el lado derecho

$(x - 2/3)^2 = 2\ (y - 10/9)$

Entonces

$h = 2/3$

$k = 10/9$

$4p = 2$ ------> $p = 2/4 = 1/2$

2.4.3. Elipse

Fórmulas de la elipse

Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \leq a \qquad 0 \leq e \leq 1$$

Ecuación reducida de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse con los focos en el eje OY

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Elipse con eje paralelos a OX y sin centro en el origen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

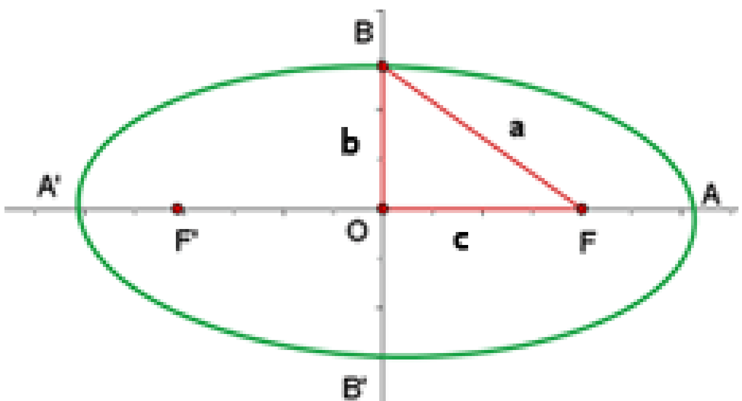
$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

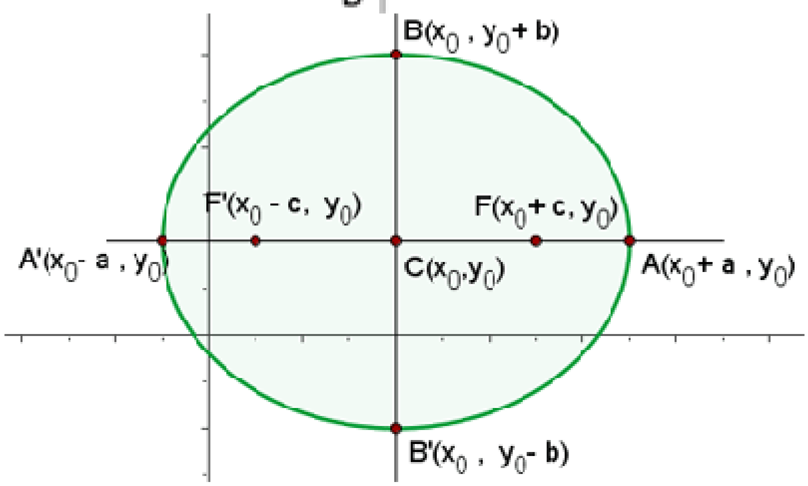
Elipse con eje paralelo a OY y sin centro en el origen

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

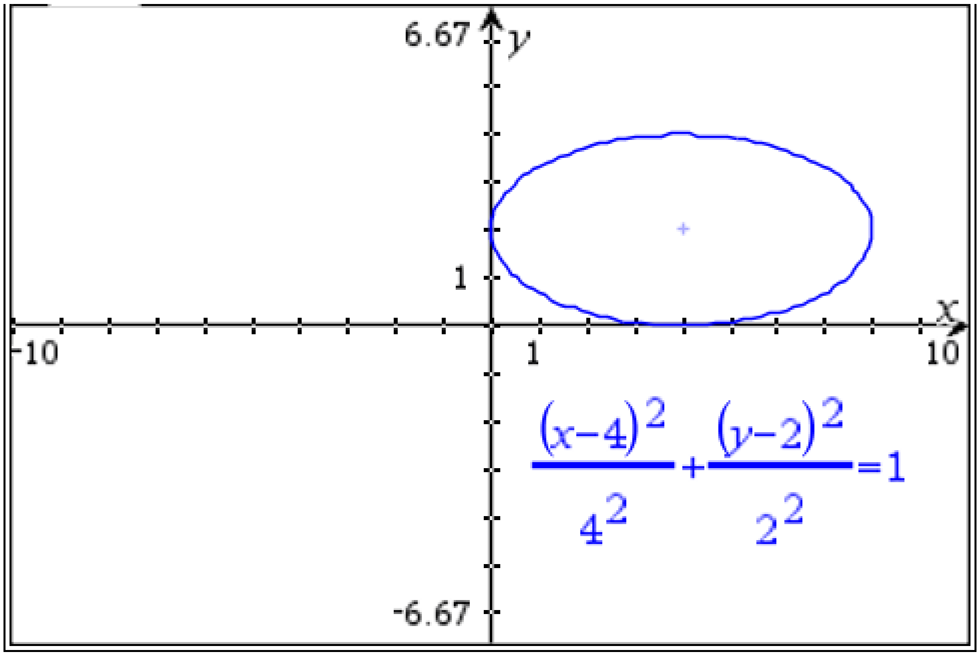
Es decir, para graficar una elipse necesitaremos de los siguientes elementos, centro, eje mayor (A y A') y el eje menor (B y B').

El foco es el cateto adyacente de un triángulo rectángulo que se forma del centro al foco, y del centro al eje menor. (ver figura siguiente).

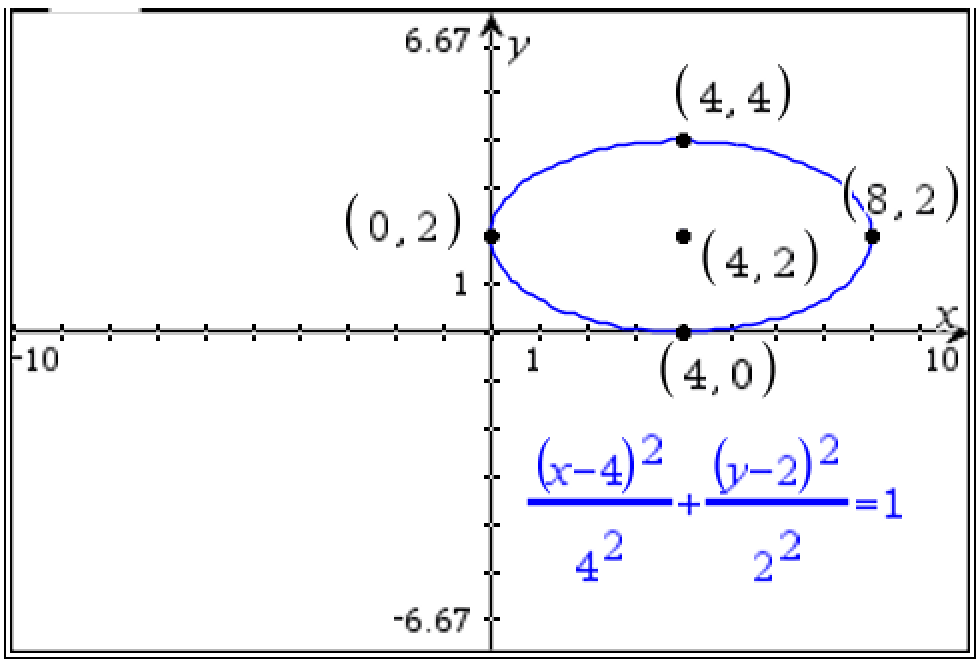




Ejemplo:



Vamos a representar esta elipse de la fórmula general y a determinar sus elementos.



centro$(4,2)$

$a^2=16 \quad \therefore \quad a=4 \qquad$ A(4+4,2) A'(4-4,2)

$b^2=4 \quad \therefore \quad \mathrm{b}=2 \qquad$ B(4,2+2) B'(4,2-2)

$c^2=\sqrt{16-4}=\sqrt{12} \qquad$ F$(4+\sqrt{12},2)$ F'$(4-\sqrt{12},2)$

Fórmula general:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{y^2}{4}-y+1=0$$

Ahora veamos el proceso inverso de la general a la cuadrática.

$$x^2+2y^2-2x+8y+5=0$$

$$(x^2-2x+1)-1+2(y^2+4y+4)-8+5=0$$

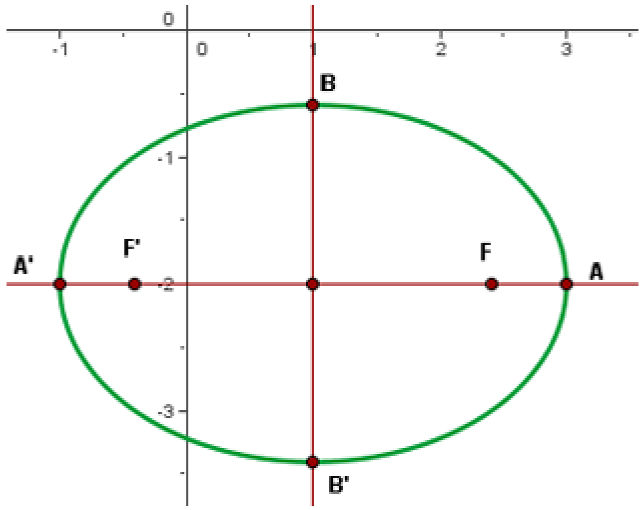
$$(x-1)^2+2(y+2)^2=4 \qquad \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$$

$$C(1,-2)$$

$a^2=4 \qquad a=2 \qquad A(3,-2) \qquad A'(-1,-2)$

$b^2=2 \qquad b=\sqrt{2} \qquad B(1,-2+\sqrt{2}) \qquad B'(1,-2-\sqrt{2})$

$c^2=\sqrt{4-2} \qquad c=\sqrt{2} \qquad F(1+\sqrt{2},-2) \qquad F'(1-\sqrt{2},-2)$



Ejercicios convierte de la forma general a la canónica:

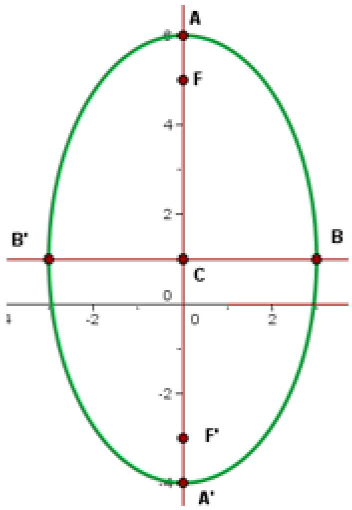
1.- $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$

$$25x^2 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 - 216 = 0$$

$$25x^2 + 9(y-1)^2 = 225 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

$C(0,1)$

$a^2 = 25$	$a = 5$	$A(0,6)$	$A'(0,-4)$
$b^2 = 9$	$b = 3$	$B(3,1)$	$B'(-3,1)$
$c^2 = \sqrt{25-9}$	$c = 4$	$F(0,5)$	$F'(0,-3)$



2.- $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y = 0$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 3(y^2 + 2y + 1) - 3 = 0$$

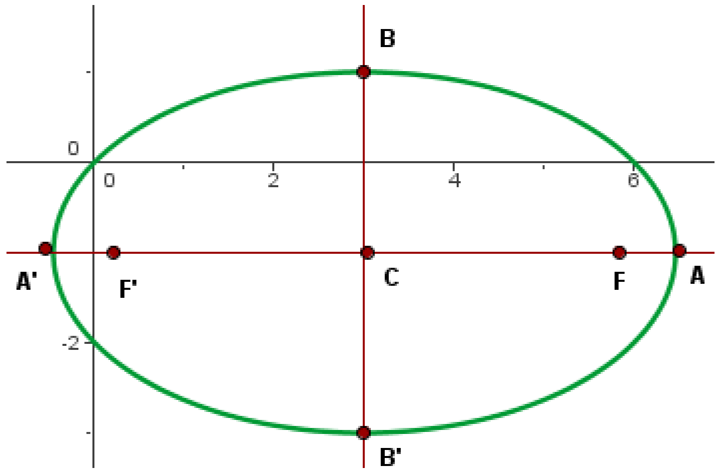
$$(x - 3)^2 + 3(y + 1)^2 = 12 \qquad \frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$C(3, -1)$

$a^2 = 12 \qquad a = 2\sqrt{3} \qquad A(3 + 2\sqrt{3}, -1) \qquad A'(3 - 2\sqrt{3}, -1)$

$b^2 = 4 \qquad b = 2 \qquad B(3, 1) \qquad B'(3, -3)$

$c^2 = \sqrt{12 - 4} \qquad c = 2\sqrt{2} \qquad F(3 + 2\sqrt{2}, -1) \qquad F'(3 - 2\sqrt{2}, -1)$



3.- $3x^2 + y^2 - 24x + 39 = 0$

$$3(x^2 - 8x + 16) - 48 + y^2 + 39 = 0$$

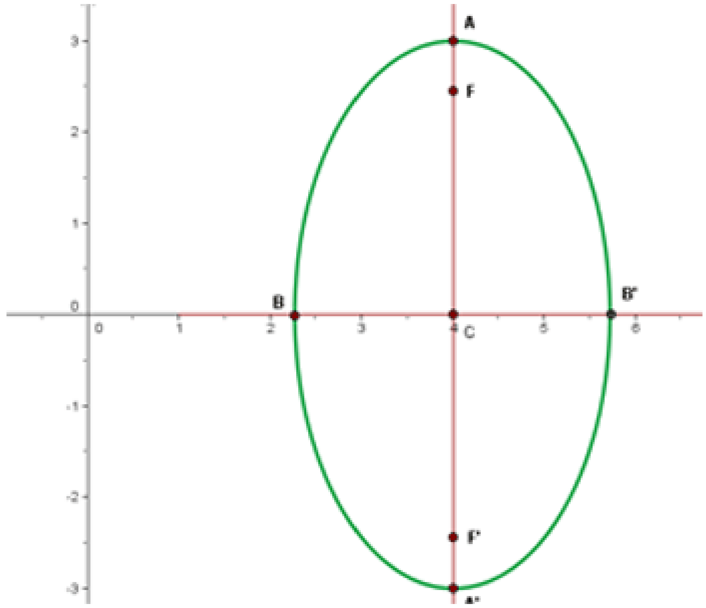
$$3(x-4)^2 + y^2 = 9 \qquad \frac{(x-4)^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$C(4, 0)$

$a^2 = 9 \qquad a = 3 \qquad A(4, 3) \qquad A'(4, -3)$

$b^2 = 3 \qquad b = \sqrt{3} \qquad B(4+\sqrt{3}, 0) \qquad B'(4-\sqrt{3}, 0)$

$c^2 = \sqrt{9-3} \qquad c = \sqrt{6} \qquad F(4, \sqrt{6}) \qquad F'(4, -\sqrt{6})$



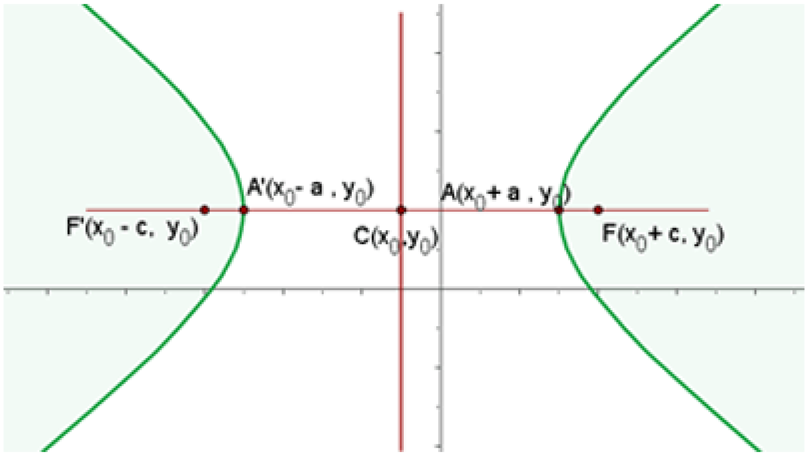
Ejercicios convierte de la forma canónica a la general y grafica

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x-8)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

2.4.4. Hipérbola



Si el **centro** de la hipérbola es **C(x_0, y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los **focos** tienen de coordenadas **F(x_0+c, y_0) y F'(x_0−c, y_0)**. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde **A y B tienen signos opuestos**.

Si el eje real está en el eje de abscisas las coordenadas de los focos son:

F'(−c,0) y F(c,0)

La expresión:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Realizando las operaciones y considerando que $b^2=c^2-a^2$.

Ejemplos:

1.- Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(4, 0), de vértice A(2, 0) y de centro C(0, 0).

$C(0,0), \qquad F(4,0), \qquad A(2,0)$

$a=2 \qquad c=4 \qquad b=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

2.- Hallar la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos los puntos F'(-5, 0) y F(5, 0), y 6 como diferencia de los radios vectores.

$2a = 6 \qquad a = 3$

$c = 5 \qquad b = \sqrt{25 - 9} \qquad b = 4$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad e = \frac{5}{3}$$

3.- Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$A(4, 0) \qquad A' = (-4, 0)$

$F = (5, 0) \qquad F' = (-5, 0)$

$$y = \frac{3}{4}x \qquad y = -\frac{3}{4}x$$

$$e = \frac{5}{4}$$

4.- Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(7, 2), de vértice A (5,2) y de centro C(3, 2).

$C(3,2)$, $F(7,2)$, $A(5,2)$

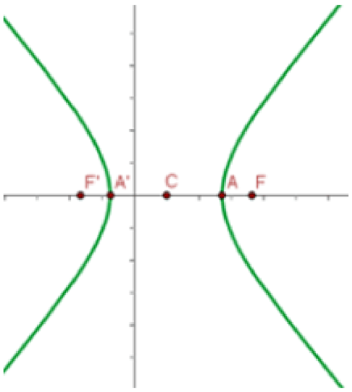
$a = 5 - 3 = 2$ $c = 7 - 3 = 4$

$b = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

5.- Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

1 $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$



$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 3y^2 - 8 = 0$$

$$4(x - 1)^2 - 3y^2 = 12$$

$$\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 3$ $\qquad$ $a = \sqrt{3}$

$b^2 = 4$ $\qquad$ $b = 2$

$c = \sqrt{3+4}$ $\qquad$ $c = \sqrt{7}$

$C\,(1, 0)$

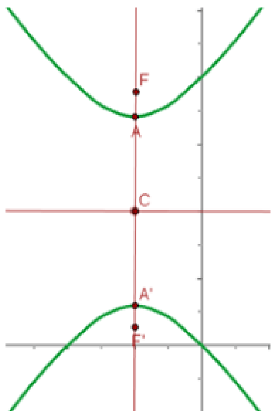
$A(1+\sqrt{3}, 0)$ $\qquad$ $A'(1-\sqrt{3}, 0)$

$F(1+\sqrt{7}, 0)$ $\qquad$ $F'(1-\sqrt{7}, 0)$

$$e = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

6.-

2 $y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$



$$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 2(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0$$

$$(y - 2)^2 - 2(x + 1)^2 = 2$$

$$\frac{(y-2)^2}{2}-(x+1)^2=1$$

$a^2=2 \qquad a=\sqrt{2}$

$b^2=1 \qquad b=1$

$c=\sqrt{2+1} \qquad c=\sqrt{3}$

$C(-1,2)$

$A(-1,2+\sqrt{2}) \qquad A'(-1,2-\sqrt{2})$

$F(-1,2+\sqrt{3}) \qquad F'(-1,2-\sqrt{2})$

$b^2 = 1$ $\qquad b = 1$

$c = \sqrt{2+1}$ $\qquad c = \sqrt{3}$

$C(-1,2)$

$A(-1,2+\sqrt{2})$ $\qquad A'(-1,2-\sqrt{2})$

$F(-1,2+\sqrt{3})$ $\qquad F'(-1,2-\sqrt{2})$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

7.- Hallar la ecuación de una hipérbola de eje focal 8 y distancia focal 10.

$$2a = 8 \qquad a = 4$$

$$2c = 10 \qquad c = 5$$

$$b = \sqrt{25 - 16} \qquad b = 3$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

8.- El eje principal de una hipérbola mide 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.

$$2a = 12 \qquad a = 6$$

$$P(8, 14)$$

$$\frac{64}{36} - \frac{196}{b^2} = 1 \qquad b^2 = 252$$

9.- Calcular la ecuación reducida de la hipérbola cuya distancia focal es 34 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.

$2c = 34 \qquad c = 17$

$a = 17 - 2 = 15 \qquad b = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$$

10.- Determina la ecuación reducida de una hipérbola que pasa por el punto $(2, \sqrt{3})$ y su excentricidad es $\sqrt{3}$.

$$\frac{c}{a} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{3}$$

$$P(2, \sqrt{3}) \qquad \frac{4}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 3 \\ \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b^2 = 2a^2 \\ \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{2a^2} = 1 \end{array}$$

$$a^2 = \frac{5}{2} \qquad b^2 = 5$$

$$\frac{2x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$$

11.- Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los vértices de la hipérbola 50 y 2.

$$2a = 50 - 2 = 48 \qquad a = 24$$

$$c = 24 + 2 = 26 \qquad b = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$$

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$$

12.- El eje principal de una hipérbola mide 12 y la excentricidad es 4/3. Calcular la ecuación de la hipérbola.

$$2a = 12 \qquad a = 6$$

$$\frac{c}{6} = \frac{4}{3} \qquad c = 8$$

$$b = \sqrt{64 - 36} \qquad b = \sqrt{28}$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$$

13.- Calcular la ecuación de una hipérbola equilátera sabiendo que su distancia focal es $8\sqrt{2}$.

$$2c = 8\sqrt{2} \qquad c = 4\sqrt{2}$$

$$a = b \qquad \left(4\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + a^2$$

$$a^2 = 16 \qquad b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 16$$

14.- El eje no focal de una hipérbola mide 8 y las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm\frac{2}{3}x$. Calcular la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices.

$2b = 8 \qquad b = 4$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{a} \qquad a = 6$

$c = \sqrt{36+16} \qquad c = 2\sqrt{13}$

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$

$A(6, 0) \qquad A'(-6, 0)$

$F(2\sqrt{13}, 0) \qquad F'(-2\sqrt{13}, 0)$